非可換従順作用

鈴木 悠平　(北海道大学)*

概　要

近年大きな進展があった，単純 C* 環上の従順作用について，概説を行う．正確な定義や厳密性は主に参考文献に譲ることとし，(それは概説ではなく，論文の役割であろう，) ここでは進展の中心にあった，具体例の構成，一般論の確立とその恩恵，さらには分類理論への応用について，その面白さと意義・インパクトを理解してもらうことを目標とする．一部の成果は小澤登高 (RIMS) との共同研究である．

1. 従順性

次の定理は直観的にはあり得ないが，数学的に証明できる定理であり，無限 (選択公理) のふるまいを端的に表しているため，有名である．(直観とはく離しているため，パラドックスと呼ばれる．)

定理 1.1 (Banach–Tarski). (*3*次元) 球体をいくつか（五個）のパーツに分解して並び替えると，同じサイズの球体を二つ組み立てることができる．

上記の定理の主張は，実は 2 次元 (円板) では成立しない．この住み分けが起こる原因は何であろうか？このような嫌なおかしな現象を避けるためには，どのような仮定が必要だろうか？この自然な問題への回答が，**従順性**という性質の起源である．定理の証明のポイントは，回転群 SO(3) が自由群 F_2 を含んでいることである．自由群それ自身については，上記の類似の分解・増殖は比較的簡単に作れ，それを作用の軌道ごとに移植していく，というのがザックリとした戦略である．一方二次元の回転群 SO(2) は可換であり，自由群の分解は強い非可換性から産まれるものなので，このような分解は起こりえない．これらの性質を徹底的に検証し，この二次元と三次元の現象の住み分けが，空間そのものではなく，実はその対称群由来のものである，ということを突き止めたのが，タルスキーやフォンノイマンであり，その後多くの分野への応用を持つことになる理論の誕生である．ここではザックリと,「よい平均が取れる」「サイズ感が狂わない」ものが従順群，バナッハ＝タルスキーのパラドックスのようなおかしなことが起こるのが非従順群であると思ってもらえればよい．いくつかの基本的な従順群の例を見ておく．

- 整数群 $\mathbb{Z}$ は従順である．たとえば整数の区間 $\{-n, -n+1, \ldots, n\}$ は少し動かしたくらいではあまり動かないし，マルコフ＝角谷の定理により，この群のコンパクト凸集合へのアファイン作用はいつでも不動点をもつ（つまり平均が取れる), ということからわかる．

本研究の一部は科研費 (研究活動スタート支援 (17H06737) 若手研究 (JP19K14550, JP22K13924))，および名古屋大学テニュアトラック資金，北海道大学着任資金の助成を受けて行われたものである．

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学大学院理学研究院数学部門
e-mail: yuhei@math.sci.hokudai.ac.jp
web: https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yuhei/j-index.html

- 従順性は，(閉) 部分群，拡大，商，帰納極限を取っても保存する．したがって特に，可解群は従順である．

- その他，位相充足群やグリゴルチュック群など，位相力学系由来の面白い従順群がたくさん見つかっており，現在でも研究が活発である．

従順群について，そのすべてを網羅することはこの予稿の目的ではないし，もともと無理なことであるが，これについて一つの金字塔となる定理を述べておく．

定理 1.2 (Connes(ごく特別な場合)). Γ が可算無限で，すべての（非自明）共役類が無限であるような群（**ICC 群**）とする．このとき，その**群フォンノイマン環** $L(\Gamma) \subset \mathbb{B}(\ell^2(\Gamma))$ は行列の無限テンソル積

$$\mathcal{R} := \overline{\bigotimes_{\mathbb{N}} (\mathbb{M}_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})}^{\mathrm{weak}}$$

（$AFDII_1$ 因子環）と同型である．(群 Γ の構造自体は溶けてなくなる！)

2. 従順作用

前章で見た通り，従順群というのはそれなりにたくさんあり，従順群に対して得られる成果はしばしばたいへん強烈である．しかしそのような性質には当然副作用があり，従順性はある意味ではかなり特別な性質である．バナッハ＝タルスキーのパラドックスの原因からもわかることであるが，自由群や，それを閉部分群に含むような群は従順でない．したがって幾何学的，代数的に現われる興味深い群の多く (たとえば線型群，双曲群，写像類群，基本群など) は，特別な場合を除いて従順ではなくなってしまう．

それでは今述べたような由緒ある群たちについて，従順群の強力な理論の援用はあきらめなければいけないのだろうか？これについて，はじめて重要な考察をしたのが Zimmer [25] である．Zimmer は，群自身が従順でなくても，しばしば**群が定める空間への作用**は，従順群の作用と同様のよいふるまいをする，という重要な発見をした．(このような現象は (ポワソン=) フルステンベルグ境界などで観察できる．) これが Zimmer 自身が基礎を築き，**従順作用**，と呼ばれている概念の起源である．この理論は後に，Zimmer 自身による**コサイクル超剛性定理** [26] や，Connes–Feldman–Weiss による**軌道構造の分類** [8] など，華々しい成果をもたらすが，これらについては述べない．

Zimmer 自身は (もともとの動機付けの作用がそうであったことから，) **測度空間**への作用を考察していたが，後にこれは Anantharaman-Delaroche [2], [3] により (局所コンパクトハウスドルフ) **位相空間**への作用に概念が拡張，整理された．典型的な例は，プロパー作用や，双曲群のグロモフ境界である．これについてもバウム=コンヌ予想や強ノビコフ予想，群フォンノイマン環の構造論などに深い応用が知られているが，これらについてここでは説明しない．小澤の論説 [16] が参考になるだろう．

位相空間への従順作用は，特に**空間がコンパクト**である場合に，群自身の解析と密に関わるため，応用が多く重要である．したがって，**どのような群がコンパクト空間に従順作用を持つか**，というのが問題になる．これは群の**完全性** (exactness) とよばれる，C* 環論の要請からまったく別の目的で調べられていた性質と，同値であることが小澤 [15] によって示されている．完全群は従順群はもちろん，線型群や双曲群，連結群など，面白い群を多く含んでいる．(完全でない群も一応知られている [14] が，現時点では，確率論によって存在をあぶりだす，Gromov の方法以外に得るすべはない．特に具体例は知られていない．)

このように，古典的な従順作用については，基礎は確立していて，多くの豊穣な応用も見つかっており，すでに完成度の高い理論体系を成している．本講演の本題は，これらの概念・理論について，**適切な (豊かな) 非可換化はあるか？**という問題と，それに対する解答である．

3. 非可換従順作用

このような問題自体は実は新しいものではなく，Delaroche [1] により 70 年代にすでにフォンノイマン環 (≈ 測度空間 $L^\infty(X,\mu)$ の非可換版) について，納得のいく，これ以外にないという定義が得られており，基礎理論も確立されている．フォンノイマン環については，上の問の答えは，残念ながらあまりよいものではなかった．フォンノイマン環上の従順作用は，従順に作用している空間上の同変バンドル (の切断代数) に限る，という定理が示されたからである．したがって**本質的に非可換性から由来する従順作用**というものは存在しない．(特に根源的な構造である**因子環**に，非従順群は従順に作用できない．)

この結果を受けてか，あまり面白くない概念であると思い込まれてしまったのか，C* 環 (≈ 位相空間 $C_0(X)$ の非可換版) についても，上の帰結をまねしたような「定義」が，Delaroche[3] により導入され調べ上げられ，Brown–小澤の本にも採り上げられていて，バウム＝コンヌ予想などへの応用もあったが，**これが本当に正しい定義なのか？**ということについては，**私が考えるまで，40 年近くの間，誰もまともに手を付けていなかったのである**．C* 環論は (測度論の単純明快さと，位相空間論の複雑怪奇さの対比からも類推されるように)，より際どい微細な構造を持ち，技術的な微妙な問題が次々と生まれてくるため，しばしばフォンノイマン環論での成功 (あるいは失敗) を移植・整備する形で後追いすることが多く，この思い込みも致し方なかったかもしれない．

今回のテーマに関する私の最初の重要な発見は，**この「常識」が間違っていた**ことを実例で検証し，立証したことである．これは特に，Delaroche の有名論文 [3] で問われていた二つの問題を否定的に解決する．

定理 3.1 (鈴木 '18, [19])．任意の完全可算群は，**クンツ環** $\mathcal{O}_2$ 上に従順（と見なすべき諸性質を備えた）作用をもつ．

クンツ環 $\mathcal{O}_2$ は古典的な**単純 C* 環**であり，拡大やバンドルの構造を持つことがない，根源的な存在である．その後ここで見つけた従順作用 (の改良版) には，いくつかの C* 環論への応用（たとえば [21], [24]）があったが，それについてはすでに予稿 [18] で解説したので，ここでは触れない．また，後で説明するように，オリジナル [19] の構成法よりもっと強力な構成法が小澤との共同研究 [17] で見つかったので，今回はこれについても説明しない．(この構成法自体も初等的でよい側面があるので，今後も何かしらの使いみちはあるかもしれない．興味のある人は原論文 [19] を当たってほしい．)

このようにして，突如クンツ環 $\mathcal{O}_2$ のような，とっくの昔に調べつくされていて，よく理解できている，と思われていた古典的な C* 環に，面白い新種の群作用がたくさん見つかったのだから，これを理解したい，というのは当然であろう．それにはまず，非可換 C* 環上の群作用の従順性をどう定式化し，どのように特徴づけ，どのような諸性質を持つか，という一般論を確立することが，重要である．これについては Buss–Echterhoff–Willett[6] による諸概念の導入や，Bearden–Crann[4] による Delaroche のフォンノイマン環上の従順作用の仕事 [2] の整備なども経て，鶴居村での合宿から始まった，小澤と

の共同研究で，次のように完全解決した．

定理 3.2 (小澤=鈴木 '20 [17], Theorem 3.2)**.** 局所コンパクト群 G の C^* 環 A への（連続）作用 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ について，次の「従順性」と呼ぶべき性質は，すべて同値である．

1. 生西の G-包絡フォンノイマン環 $G \curvearrowright A''_\alpha$ が (フォンノイマン環の意味で) 従順.
2. G-ヒルベルト C^* 双加群 $L^2(G,A)$ が概不変，概中心な単位ベクトルネットをもつ.
3. 包絡フォンノイマン環 A^{**} の中心 $Z(A^{**})$ について，G-同変な条件付き期待値
$$L^\infty(G, Z(A^{**})) \to Z(A^{**})$$
が存在する．

もちろんこれは，古典的な場合（群そのものの従順性：$A=\mathbb{C}$，位相空間への作用：Aが可換) を含んでいるが，いずれの条件も，非可換性によって新たに考慮すべき条件があり，いくつかあった候補のどれが正しいのか（結果的にはすべて同値であり，すべて正しい），解決するのは骨であった．とくに，もともと [6] では，包絡フォンノイマン環に誘導される作用 $G \curvearrowright A^{**}$ が，一般には**不連続である**ため，代替として，その連続成分 A''_α(生西の G-包絡フォンノイマン環）が採用されていたのだが，結局 A^{**} を用いてもうまく特徴づけができたことは少し不思議に思う.（この特徴づけは，次の系を示す必要性から出てきたものである．）

さて，この定理の実態としては，2. の条件が，C^* 環をそのまま用いた定義なので，もちろん接合積や作用を調べるのに便利である．一方で，条件 1. もしくは 3. を用いて，フォンノイマン環に移行して解析を行い，C^* 環に戻ってくる，という方法もしばしば強力である．フォンノイマン環の方が，より簡明で強固な構造と解析理論を備えているからである．このような議論ができるのは，上記の定理が確立できたおかげである．この技術の強力さを象徴する一つの帰結として，一見 (従順群を知っている人には) 当たり前の主張であるが，C^* 環論の中だけで証明するのは難しいであろう次の定理を紹介しておく．これは条件 3. に移行すれば自明である．

系 3.3 (小澤=鈴木 '20 [17], Corollary 3.4)**.** C^* 環への作用の従順性は，閉部分群に制限しても保たれる．

次の定理も似たような応用で，今度はもっと即効性のある重要な帰結を持つ．

定理 3.4 (小澤=鈴木 '20 [17], Theorem 5.1)**.** C^* 環 A に，局所コンパクト群 G とコンパクト群 K が互いに交換するように作用している．このとき，不動点環 A^K への G 作用が従順であれば，もとの作用 $G \curvearrowright A$ も従順である．

逆の主張も正しいことは比較的すぐにわかる．興味深い C^* 環はしばしば，標準的な (したがって，よい作用とは交換する) コンパクト群作用を持ち，さらにその不動点環はもとの環よりずっと調べやすい．たとえば無理数回転環 $\mathcal{A}_\theta$ には $\mathcal{A}_\theta^{\mathbb{T}^2}=\mathbb{C}$ となるような作用，クンツ環 $\mathcal{O}_n$, $n<\infty$ には $\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}} = \bigotimes_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ となるような作用が自然に定まる．そのためこの定理はたいへん有用である．

定理 3.4 を証明するには，コンパクト群に関する**ワッサーマン包含**の考え (接合積 $A \rtimes K$ を不動点環 A^K の有限指数拡大で近似する) を援用し，さらに一度フォンノイマン環に移行し,（今回は条件 1. を使う) ピムスナー＝ポパの (フォンノイマン環の) 指数

理論を用いることで，$G \curvearrowright A \rtimes K$ の従順性が得られる．再びフォンノイマン環の世界に移行することで，$G \curvearrowright A \rtimes K$ の従順性から，$G \curvearrowright A$ の従順性を引き出すことはそれほど難しくない.（しかし超越的な構造がたくさん出てくるので，証明の点検には神経をすり減らした．これに限らず作用素環論で連続群を扱う場合，離散群では直観的に扱えていたことに，かなり際どい綱渡りのような議論を繰り返すことが多く，証明のチェックは大変である．実際，いい加減な人が書いた論文には，簡単な議論で致命的なミスをしていて完全に破綻しているものもある．このような機微を理解していない人たちが，粗悪な論文を量産している昨今の現状は，同分野の一研究者として，たいへん残念に思う．）

定理 3.4 を**ピムスナー環**に適用することで，次のような非可換従順作用を量産する，たいへん有用な構成が得られる．

系 3.5 (小澤＝鈴木 '20, [17], Corollary 6.2)**.** ピムスナー＝マイヤーの構成法は，作用の従順性を保存する．

ここで，**ピムスナー構成法**とは，ヒルベルト C^* 双加群 $\mathcal{E}$ から，内積関係によって，普遍 C^* 環 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ を定める方法である．Meyer[12] は C^* 力学系から同変双加群 $\mathcal{E}$ を作り，ピムスナー構成を通して単純 C^* 環上の作用を与える構成法を，別の目的から調べていた．この構成のよいところ（Pimsner の慧眼である）は，加工後の C^* 環が**強い単純性 (＝純無限性）を持つ**一方で，**もとの材料のさまざまな特徴**（特に C^* 力学系の位相不変量，**同変 KK）を引き継いでいる**，という点にある．この構成法が**作用の従順性さえも保つ**，というのが上述の系である．これは具体的な簡単な例についても，まったくの非自明であると思われる．フォンノイマン環や不動点環に移行せず，直接従順性をチェックする方法は今のところ知らない．

これにより，**キルヒバーグ環**と呼ばれる重要なクラスの C^* 環上に，不変量 (より正確には同変 KK) を制御しながら，自在に従順作用を量産できるようになった．この定理が得られる以前に同様のことは，私の研究 [20] で，自由群についてのみ，技巧的なあまり自然とは思えない構成によってわかっていただけであったが，実りの多かった共同研究によって，いっぺんにその風景が変わってしまったのである．

4. 非可換従順作用の分類理論への応用

作用素環の構造を解明するためには，しばしばその上の**群作用**を理解する必要がある．よくわからないものは，そのままただ眺めていてもやはりよくわからないので，それを転がしたりひっくり返したりつついたりしてみる，というのは日常でもよくあることだろう．これは**冨田＝竹崎理論**や，**コンヌの III 型環の構造・分類理論**などが典型であり，群作用は数理物理学から現われる自然な構造でもあるらしいのだが，私はこれらについて詳しくないのでこれ以上言及しない．一方で，作用素環上の群作用は，**接合積構成**（＝半直積の作用素環版）を用いて，新しい特徴をもつ作用素環や，既知の作用素環の新しい表示を与える泉源となる，という重要な側面もある.（それによって，新しい現象が引きずり出される.）そのため，作用素環上の群作用の構造を深く理解することは，作用素環論そのものを解明するために，双方向の重要性がある．特に**これらを適切な意味で，分類したい**．しかし作用素環は，それなりに巨大な構造で，自己同型も普通たくさん作ることができてしまう．そもそもそんなことは本当に可能なのだろうか？これについてはフォンノイマン環において，次のような大きな成功がある．

定理 4.1 (Connes, Jones, Ocneanu)**.** Γ を可算従順群とし，$\mathcal{R}$ を $AFD\ II_1$ 因子環 (定理

1.2にあるフォンノイマン環) とする．このとき，Γの$\mathcal{R}$への外部作用は，すべて互いに**コサイクル共役**である．

ここでコサイクル共役とは，通常の同変同型の他に，内部の非可換性由来の歪み (1-コサイクル) によるズレを許容した，同値関係である．同変同型で分類できれば本当は一番いいのだが，作用素環は強い非可換性を持つため，それは（非コンパクト群では）不可能であることがよく知られている．(たとえば [21] を見よ．) しかし，コサイクル共役もそれほど悪いものではない．たとえばコサイクル共役は接合積間の具体的な同型を定める．

ここで従順群という要請があることに気がつく．この条件は本当に必要だろうか？残念ながら，これは本当に必要である．

定理 4.2 (Brothier–Vaes [5] (cf. Jones, Popa))**.** Γが非従順な可算群であるとする．このときΓの$\mathcal{R}$への外部作用で，接合積が互いに同型でないものが連続個ある．(特にこれらは互いにコサイクル共役ではない！)

これより,（単純）作用素環上の非従順群の作用をまっとうに理解しようとする試みは，**馬鹿げた挑戦である**と理解されるようになってしまったと思う.（たとえばJonesの論文のタイトルは,「**A converse to Ocneanu's theorem**」である．) これは実際，自由群を考えるだけでも，自己同型をいくつか適当に取ってくれれば，たちまち自由群作用ができてしまうのだから，無謀であることにも納得がいくだろう．

私の今回の題目に関する大きな貢献の三つ目は，この「常識」が，C^* **環の世界では正しくなかった**，ということである．

定理 4.3 (鈴木 '20 [22])**.** Γを完全可算群とする．このとき，$\mathcal{O}_2$を同変吸収するΓのクンツ環$\mathcal{O}_2$への外部従順作用は，**コサイクル共役を除いてちょうど一つある**．

ここで，群の完全性は，クンツ環（単位的C^*環）に従順作用を持つために，必要な条件である ([17], Corollary 3.6)．しかし完全群は線型群や双曲群などをすべて含む，きわめて広大なクラスを成していることを同時に思い出しておきたい．これよりたとえば，定理3.1で構成した作用は，構成の過程で出てくるもろもろの材料の選び方に影響されず，すべてコサイクル共役となることがわかる．これ自体きわめて非自明な帰結であると思うが，この定理は次のように，**キルヒバーグの$\mathcal{O}_2$テンソル吸収定理**の同変版に翻訳することができる．

系 4.4 (鈴木 '20 [22])**.** Γを完全可算群とし，単純，従順，単位的，可分なC^*環上の任意の作用$\alpha\colon \Gamma \curvearrowright A$ を考える．$\delta\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{O}_2$ を定理*4.3*にある作用とする．このとき，対角作用

$$\alpha \otimes \delta\colon \Gamma \curvearrowright A \otimes \mathcal{O}_2$$

は，δとコサイクル共役である．

つまり，作用δを (自明な制約を持たない) 作用にテンソルしてしまえば，どんな情報も完全に初期化できる，ということを意味している.（あたかも0を掛けると，どんなものも0になってしまうかのように！）

これは**非従順群の，単純作用素環上の作用を完全解明した，はじめての定理**である．(先ほどフォンノイマン環のときに注意したことを鑑みれば，自由群について考えるだけでも，そのインパクトがわかるはず．) この定理は，まだ非可換従順作用の定義がど

うあるべきか，混沌としていたときに得られたものであり，定理3.2で考えた諸条件が正当な定義である，ということを支持する強い根拠となった，という点でもこの定理は重要である．

繰り返すが，フォンノイマン環の世界では，作用の従順性はバンドル分解の底空間のみに起因するものなので，同様の分類定理は期待できない．C* 環のきめの細かい細微な構造があって，はじめて観測できる現象であることを強調しておく．また，位相空間上の従順作用については，Connes–Feldmann–Weiss のようなきれいな分類は期待できないと思われるので，これは連続的・位相的なカテゴリーの中で，非従順群の作用を完全解明することに成功した，はじめての定理である，と強調してもよい．

これより，従順群については，単純C* 環上の群作用の分類問題が20年以上研究されていたわけだが, (たとえば [11] を見よ) その深度と広大さへのこれまでの理解（誤った過小評価）を根本的にひっくり返す，革命が起こったのである．私が定理4.3を出したとき，ちょうど**Szabó**が従順群作用の分類理論を，共同研究者の**Gabe** と完成させる間近であった．私がこのプレプリントを彼に送った際，このアイデアを組み合わせれば，従順作用についても，自分たちの理論が拡張できるはず！という興奮気味の返信があり，その2年ほど後，彼らは本当にそれを成し遂げてしまった！([9], [10]）記憶が正しければ，おそらく私が作用素環論を本格的に始めてから (≈10年) リアルタイムで遭遇した，作用素環論における，いちばん大きな「事件」であると思う．(もちろんこの類の議論は綱渡りのようなもので，ひとつのちょっとしたミスが致命傷になることが多いから，今後行われるであろう徹底的な検証をクリアできれば，という前提がある．)

定理 4.5 (Gabe–Szabó ’22 [9], [10])**.** 任意の可算群について，キルヒバーグ環上の外部従順作用は，同変 KK 同値により，コサイクル共役を除いて完全分類できる．

定理 4.5 はより一般に，任意の第二可算局所コンパクト群について成り立つが，連続群については，作用に技術的な条件が必要となるため，ここでは離散群の場合に限り主張を述べた．この定理はこれまで散在していた，キルヒバーグ環上の群作用の分類型定理をすべて，ごく特別な場合として含み，改良の余地のない，究極の定理である．特に**泉の予想**が，ごく特別な場合として，完全に解決されている．(これについてはMeyer[12] による貢献もあることを述べておく．)

証明の基本戦略は，キルヒバーグ環の分類定理の，**Dadarlat–Eilers** による証明方針を，作用込みの状況に拡張していく，というものである．重要な新しいアイデアとしては，今回導入された，**isometrically shift-absorption** という性質が顕著である．これは群 G の正規表現 $L^2(G)$ が，適切にだいたいC* 力学系に埋め込める，という要請である. (岸本 [13]，キルヒバーグらの定理より，離散群の場合，これは作用の外部性と同値である．離散群のときには，この性質は [22] などでも暗に利用されていたのだが，これを連続群まで含めて，分類理論に有効な定式化にたどり着くまでには，多くの試行錯誤があったのだろう.）この性質（ヒルベルト加群における現象を，中心列環に再現する）と作用の従順性（必要となる現象を，ヒルベルト加群の中で再現する）が絶妙に補完しあうことで，C* 力学系の構造の深い部分まで，手が届くようになったのである．これまでC* 力学系の分類理論では，Connes, Jones, Ocneanu の分類定理の成功以来，フォンノイマン環論で常識となっていた，作用の**ロホリン性質**を正しく移植する，というアプローチが基本であった．ロホリン性質は大雑把には，群のよいタイリングをだいたい力学系の中心に埋め込める，という要請である．これは一定の成功を

収めていたが，残念ながら群が複雑になるほど，位相的なふるまいをする C^* 環では，定式化することそのものが難しくなる．とくに非従順群については，その根本的な要請から，そもそも定義することができない．なまじあるところまでは旧来の戦略がうまく機能してしまっていたため，古くからこの問題をやっていた人たちには，構造の神髄が正しく見えていなかったのではないだろうか.（このような現象は近年，離散群の C^* 単純性について，Kalantar–Kennedy によるブレイクスルーでも，同様のことがあった.）今回の Gabe–Szabó の成功から学ぶべき教訓があるとすれば，強大なアイデアや道具は，それのみに人々の注意を集めてしまう，という意味で，時には毒にもなりうる，ということであろう.

5. その後の進展と今後の発展

最後にこの理論の今後の展望について述べて終わりにしたい．すでに述べたように，非可換従順作用の分類について，環が純無限である場合（＝キルヒバーグ環）には，すでに満足のいく構成法 (系 3.5) と分類定理 (定理 4.5) が確立されている．しかし C^* 環にはもう一つ，より古典的で重要なクラスがある．**トレース**を持つ，**有限型** C^* **環**である．これらについても当然，同様の発展を期待したくなる．しかしトレースを持つという条件は，ある意味とても繊細で壊れやすいものでもあるので，そもそも非可換従順作用の具体例を構成することがたいへんである．(接合積やピムスナー構成が絡むと，トレースは壊滅してしまう．) はたして有限型単純環上に，そんなものがあるのだろうか？このような例の構成は Rørdam など，高名な研究者にも挑戦していた人たちがいたらしい (最近研究集会で講演した時に本人から聞いた) が，今年の年度が変わった頃に，私はようやく構成に成功した．おかげで現時点では，非可換従順作用の構成方法には，すべて私の名前がついている，という状況が防衛できている.

定理 5.1 (鈴木 ’22 [24])．すべての可算群は，(分類可能な) 有限型 C^* 環の上に，従順作用をもつ.

構成は，トレースを持つように制御する，という強い要請があるため，かなり巧妙にならざるを得なかった．今回材料となったのは，

1. $c_0(\Gamma)$ (Γ 上の無限遠で消える列空間の C^* 環),
2. $\ell^2(\Gamma)$ の全フォック空間 $\mathcal{F}(\ell^2(\Gamma)) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \ell^2(\Gamma)^{\otimes n}$,
3. 単純 C^* 環 A と，その上のトレース τ_A を縮小する自己同型 $\alpha\colon A \to A$

の三つである．1． 2. の構造（したがってすぐ下にある C^* 環 B）には，いずれも左掛け算により Γ は自然に作用する．これが求める作用の起源となる．基本的なアイデアは，C^* 環

$$B := c_0(\Gamma) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{F}(\ell^2(\Gamma))) \otimes A$$

の帰納極限をうまく取って，単純化する，というものである.

それにはたくさんある $c_0(\Gamma)$ のイデアル (Γ の部分集合と同じだけある！) を減らしていく必要があり，そのためには**ラプラシアン**

$$\Delta\colon c_0(\Gamma) \to c_0(\Gamma); \quad \delta_g \mapsto \delta_{gS}$$

を用いる．ここで，Γ は有限生成であるとし，$S \subset \Gamma$ は (半群としての) 有限生成系である．もちろんラプラシアン Δ は**乗法的ではない**ため，B 上でそのまま準同型にはならない．これは，各 δ_g ごとに，**左生成作用素** $c(\delta_g)$ で出力の第二成分 $\mathbb{K}(\mathcal{F}(\ell^2(\Gamma)))$ をずらして「**直交化**」することで，うまく修正できる．しかしこのままではラプラシアン Δ は正規化する前のものなので，B が持っているトレースを壊してしまう．そこで仕上げに，人畜無害であった A の部分をトレース縮小自己同型 α で圧縮することで，正規化を行う．この構成は材料同士の特性が巧妙に絡み合っており，結果としてトレースを保つ，Γ-同変準同型 $\sigma\colon B \to B$ が得られる．これが定める (自己相似) 帰納系

$$B \xrightarrow{\ \sigma\ } B \xrightarrow{\ \sigma\ } B \xrightarrow{\ \sigma\ } \cdots \xrightarrow{\ \sigma\ } B \xrightarrow{\ \sigma\ } \cdots$$

の極限 C^* 環 $\mathfrak{B}$ が求めるものである... とはじめは思ったのだが，これでは不十分であった．$\mathfrak{B}$ は既約であるが，単純ではなかった.（この二性質には大きなギャップがある．もともと考えていた構成はもっとシンプルだったのだが，単純にはどうしてもなってくれないことがわかったので，ラプラシアンやフォック空間のような構造を導入することになった.）最後に帰納系の自己相似性（番号をずらしても同じ）を用いて，$\mathfrak{B}$ 上の自己同型を定め，これについて接合積 $C = \mathfrak{B} \rtimes \mathbb{Z}$ を取ることで，求めていた作用 $\Gamma \curvearrowright C$ がようやく手に入った.（これが求める諸性質を持つことを調べるには，接合積の解析が必要である．たとえば単純性には岸本の定理 [13] を援用し，従順性を見るには定理 3.4 を使った．）

上で見た通り，現時点では有限型の単純 C^* 環上の従順作用は，その構成がたいへん技巧的であり，自由生産は今後の目標である．一方で，ある程度構成が技巧的になることは，**有限型 C^* 環自身がもつ複雑さや，それに起因する従順作用の制約**から，致し方ない側面もあるだろう．たとえば非従順群は，トレースを（スカラー倍のズレを除いて）一つしかもたない C^* 環には従順に作用できない.（特に UHF 環，ジャン=スー環 $\mathcal{Z}$，ラザック=ジャスロン環 $\mathcal{W}$ およびこれらの安定化 $-\otimes\mathbb{K}$ など，よく研究されていて，より根源的な有限型単純 C^* 環には，従順に作用できない.）

しかし同時に上記の構成はすでに，有限型の非可換従順作用が，**巨大で豊かな体系を成している**ことを示唆する，十分な証拠を与えていると考えている．少し計算するとわかるのだが，上記の構成で，A(とその上の自己同型) をうまくとっておけば，出来上がる C の**トレース空間** $\mathrm{T}(C)$ は，正値右調和関数錐 $\mathrm{Har}(\Gamma, S^{-1})_+$ と，作用も込めて同型になる．もちろんトレース空間の情報は，純無限な場合には空 $\emptyset$ であるので，ここで出てきた色彩豊かな不変量から，もとの作用をどう理解すればよいか，という問題は，私や Gabe–Szabó の分類定理では現われなかった難題で，たいへん挑戦的であり，現時点では底の深さが図り知れない．今見た通り，有限型 C^* 環上の作用は，同変 KK だけでは拾いきれない，トレース空間や K_0 群の順序構造など，付加的な情報を持っている.（より正確には，エリオット不変量に誘導される作用 $G \curvearrowright \mathrm{Ell}(A)$.）これらの構造を解明することは，分類理論が終わったと思っていた作用素環論研究者に挑戦する，今後の C^* 環論の中心的課題，そして分類理論に残された究極目標となるのではないかと予想している．

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche, *Action moyennable d'un groupe localement compact sur une algèbre de von Neumann.* Math. Scand. **45** (1979), 289–304.

[2] C. Anantharaman-Delaroche, *Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité*, Math. Ann. **279** (1987), 297–315.

[3] C. Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their* C**-algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4153–4178.

[4] A. Bearden, J. Crann, *Amenable dynamical systems over locally compact groups.* To appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

[5] A. Brothier, S. Vaes, *Families of hyperfinite subfactors with the same standard invariant and prescribed fundamental group.* J. Noncommut. Geom. **9** (2015), 775–796.

[6] A. Buss, S. Echterhoff, R. Willett, *Amenability and weak containment for actions of locally compact groups on* C**-algebras.* To appear in Mem. Amer. Math. Soc.

[7] A. Connes, *Classification of injective factors.* Ann. Math. **74** (1976), 73–115.

[8] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation,* Ergodic Theory and Dynamical Systems **1** (1981), 431–450.

[9] J. Gabe, G. Szabó, *The stable uniqueness theorem for equivariant Kasparov theory.* Preprint, arxiv:2202.09809v2.

[10] J. Gabe, G. Szabó, *The dynamical Kirchberg–Phillips theorem.* Preprint, arXiv:2205.04933v2.

[11] M. Izumi, *Group Actions on Operator Algebras.* Proc. Intern. Congr. Math. (2010), 1528–1548.

[12] R. Meyer, *On the classification of group actions on* C**-algebras up to equivariant KK-equivalence.* To appear in Ann. K-Theory.

[13] A. Kishimoto, *Outer automorphisms and reduced crossed products of simple* C**-algebras.* Comm. Math. Phys. **81** (1981), no. 3, 429–435.

[14] D. Osajda, *Small cancellation labellings of some infinite graphs and applications.* Acta Math. **225** (2020), 159–191.

[15] N. Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **330** (8) (2000), 691–695.

[16] 小澤 登高, 離散群と作用素環. 数学 **61** (2009), 337–351.

[17] N. Ozawa, Y. Suzuki, *On characterizations of amenable* C**-dynamical systems and new examples.* Selecta Math. (N.S.), **27** (2021), Article number: 92 (29 pages).

[18] 鈴木 悠平, キルヒバーグ環上の従順作用とその応用. 2019 年作用素論作用素環論研究集会の予稿, https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/ yuhei/yokou.pdf

[19] Y. Suzuki, *Simple equivariant* C**-algebras whose full and reduced crossed products coincide.* J. Noncommut. Geom. **13** (2019), 1577–1585.

[20] Y. Suzuki, *Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical systems.* Comm. Math. Phys. **375** (2020), 1273–1297.

[21] Y. Suzuki, *On pathological properties of fixed point algebras in Kirchberg algebras.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **150**(6) 3087-3096.

[22] Y. Suzuki, *Equivariant* $\mathcal{O}_2$*-absorption theorem for exact groups.* Compos. Math. **157** (2021), 1492–1506.

[23] Y. Suzuki, *Non-amenable tight squeezes by Kirchberg algebras.* Math. Ann. **382**(1-2), 631–653.

[24] Y. Suzuki, *Every countable group admits amenable actions on stably finite simple* C**-algebras.* Preprint, arXiv:2204.04480.

[25] R. J. Zimmer, *Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks.* J. Funct. Anal. **27** (1978), 350–372.

[26] R. J. Zimmer, *Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups.* Ann. of Math. (2) **112** (3) (1980), 511–529.